ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) dx.$$

2. 2 С помощью правила Лопиталя найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin(2t)}{t}\,dt\right).$$

3. 2 Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n^2}.$$

4. 2 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

5. 3 Исследовать на экстремум функцию $u(x,y) = 1 + x + \frac{1}{y}$ при условии $x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$.

6. 3 Найти расстояние между поверхностью $\varGamma$ и плоскостью $\varPi$, где

$$\varGamma = \left\{ (x,y,z) \;:\; y = 1 + x^2 + z^2 \right\}, \quad \varPi = \left\{ (x,y,z) \;:\; 2x + z - y = 4 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

7. 2 Записать в другом порядке повторный интеграл

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos y} f(x,y)\,dx.$$

8. 2 Вычислить

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}, \quad \text{где } G = \left\{ (x,y) \;:\; 9 \le x^2 + y^2 \le 25 \right\}.$$

9. 2 Вычислить

$$\iint\limits_S (y-z)\,dS, \quad \text{где } S = \left\{ (x,y,z) \;:\; x^2+y^2+z^2 = 1,\ y \le 0 \right\}.$$

10. 3 Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^2 \left(xy(x)y'(x) - 2\left(y'(x)\right)^2 \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = \operatorname{sh} 1.$$

11. (3) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$xyu_x - yu_y + (z + xe^y)\, u_z = 0, \quad u = z \quad \text{при} \quad y = 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

12. (3) Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{ix}{3}\right)}{(3i + x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для справки: $F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp(-ixy)\, dx$, где $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

13. (3) Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{z+i} \sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right) dz, \quad \text{где контур ориентирован против часовой стрелки.}$$

14. (3) Решить задачу Коши

$$2\sqrt{y} u_{xy} + 2yu_{yy} + u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u\Big|_{y=4} = -2, \quad u_y\Big|_{y=4} = -\frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

в наибольшей области, где решение определено однозначно, и указать эту область.

15. (3) Решить смешанную задачу на полупрямой

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \sin 2x, \quad u_t\Big|_{t=0} = -2\cos 2x, \quad x > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = -2t, \quad t > 0.$$

16. (3) Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^2$ ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$):

$$\Delta u = 12r^2 \sin 2\varphi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$(u + u_r)\Big|_{r=1} = 2 + 2\sin 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=2} = 1 - \sin\varphi + 28\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

17. (3) Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t) = \begin{cases} \exp(-t), & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения $P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = XY$, и вычислить математическое ожидание и дисперсию Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. (2) Вычислить

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\,dx.$$

Ответ: $1-\frac{\pi}{4}$.

2. (2) С помощью правила Лопиталя найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{\sin(2t)}{t}\,dt\right).$$

Ответ: 2.

3. (2) Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n^2}.$$

Ответ: сходится по признаку Коши, так как $\sqrt[n]{a_n}\to\frac{3}{e^2}<1$.

4. (2) Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

Ответ: сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

5. (3) Исследовать на экстремум функцию $u(x,y)=1+x+\frac{1}{y}$ при условии $x^2+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{8}$.

Ответ: $u\left(-\frac{1}{4},-4\right)=\frac{1}{2}-\min$, $\quad u\left(\frac{1}{4},4\right)=\frac{3}{2}-\max$.

6. (3) Найти расстояние между поверхностью $\varGamma$ и плоскостью $\varPi$, где

$$\varGamma=\left\{\ (x,y,z)\ :\ y=1+x^2+z^2\ \right\},\quad \varPi=\left\{\ (x,y,z)\ :\ 2x+z-y=4\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\rho\left(\varGamma,\varPi\right)=\frac{5\sqrt{6}}{8}$.

Пусть (x,y,z) — точка $\varGamma$, ближайшая к $\varPi$. Тогда вектор $(2x,-1,2z)$ — нормаль к касательной плоскости поверхности $\varGamma$ в этой точке — параллельна нормали $(2,-1,1)$ к $\varPi$. Следовательно, существует $a\in\mathbb{R}$, такое, что $(2x,-1,2z)=a(2,-1,1)$, откуда $a=1$, $x=1$, $z=\frac{1}{2}$, $y=1+1+\frac{1}{4}=$ $=\frac{9}{4}$. Тогда точкой плоскости $\varPi$, ближайшей к $\varGamma$, является $\left(1,\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)+t(2,-1,1)$ для подходящего $t\in\mathbb{R}$, а искомое расстояние равно $\left|t(2,-1,1)\right|=|t|\sqrt{6}$. Имеем: $4=2+4t+\frac{1}{2}+t-\frac{9}{4}+t=6t+\frac{1}{4}$, то есть $t=\frac{5}{8}$.

7. 2 Записать в другом порядке повторный интеграл

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos y} f(x,y)\,dx.$$

Ответ: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)\,dy.$

8. 2 Вычислить

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}, \quad \text{где } G = \Big\{\ (x,y)\ :\ 9 \le x^2+y^2 \le 25\ \Big\}.$$

Ответ: $\pi \ln 3.$

9. 2 Вычислить

$$\iint\limits_S (y-z)\,dS, \quad \text{где } S = \Big\{\ (x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2=1,\ y \le 0\ \Big\}.$$

Ответ: $-\pi.$

10. 3 Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_0^2 \Big(xy(x)y'(x) - 2\left(y'(x)\right)^2\Big)\,dx, \quad y(0)=0, \quad y(2) = \operatorname{sh} 1.$$

Ответ: Уравнение Эйлера $4y'' - y = 0$, экстремали $y(x) = C_1 \operatorname{sh}\frac{x}{2} + C_2 \operatorname{ch}\frac{x}{2}$, допустимая экстремаль $\hat{y}(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{2}$,

$$J\left(\hat{y}+h\right) - J\left(\hat{y}\right) = \int_0^2 \left(-\frac{\left(h(x)\right)^2}{2} - 2\left(h'(x)\right)^2\right) dx < 0, \quad \forall\, h \in C_0^1[0,2], \quad h \not\equiv 0.$$

11. 3 Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$xyu_x - yu_y + (z + xe^y)\,u_z = 0, \quad u = z \quad \text{при} \quad y = 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Ответ: Первые интегралы $U_1 = xe^y$, $U_2 = y\,(z + xe^y)$, общее решение $u = F(U_1, U_2)$, решение задачи Коши $u = U_2 - U_1 = yz + (y-1)xe^y$.

12. 3 Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{ix}{3}\right)}{(3i+x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для справки: $F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\exp(-ixy)\,dx$, где $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

Ответ: $F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{ll} -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=-3i} \frac{\exp\left(-iz\left(\frac{1}{3}+y\right)\right)}{(3i+z)^2}, & \frac{1}{3}+y > 0 \\ 0, & \frac{1}{3}+y \le 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{3}+y\right)e^{-1-3y}, & y > -\frac{1}{3}, \\ 0, & y \le -\frac{1}{3}. \end{array} \right.$

13. ③ Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{z+i} \sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right) dz, \quad \text{где контур ориентирован против часовой стрелки.}$$

Ответ: $2\pi(\sin 1 - 2\cos 1)$.
Обозначим $f(z) = \frac{z}{z+i}\sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$, тогда $\oint\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{\infty} f$.
$\operatorname*{res}\limits_{\infty} f = i(\sin 1 - 2\cos 1)$, так как при $|z| > 1$ выполнено
$f(z) = \left(1 - \frac{i}{z} + \ldots\right)\sin\left(1 + \frac{2i}{z} + \ldots\right) = \left(1 - \frac{i}{z} + \ldots\right)\left(\sin 1 + \frac{2i}{z}\cos 1 + \ldots\right) = \frac{-i\sin 1 + 2i\cos 1}{z} + \ldots$.

14. ③ Решить задачу Коши

$$2\sqrt{y}u_{xy} + 2yu_{yy} + u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u\Big|_{y=4} = -2, \quad u_y\Big|_{y=4} = -\frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

в наибольшей области, где решение определено однозначно, и указать эту область.

Ответ: $u = 2 - 2\sqrt{y}$ в области $\{\ 0 < x < 1,\ -4 < x - 2\sqrt{y} < -3\ \}$.
Характеристические переменные $\xi = x$, $\eta = x - 2\sqrt{y}$.
Уравнение в характеристичеких переменных $-2u_{\xi\eta} = 0$.
Общее решение $u = F(\xi) + H(\eta) = F(x) + H\left(x - 2\sqrt{y}\right)$.
Решение задачи Коши $H(\eta) = \eta + C$, $-4 < \eta < -3$; $F(\xi) = 2 - \xi - C$, $0 < \xi < 1$.

15. ③ Решить смешанную задачу на полупрямой

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \sin 2x, \quad u_t\Big|_{t=0} = -2\cos 2x, \quad x > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = -2t, \quad t > 0.$$

Ответ: $u = \begin{cases} \sin 2(x-t), & x \geq t \geq 0, \\ 2(x-t), & t \geq x \geq 0. \end{cases}$
Общее решение $u(t,x) = f(x-t) + g(x+t)$, где $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^2[0,+\infty)$.
Из начальных и краевых условий $g(\eta) = C$, $\eta \geq 0$, $f(\xi) = -C + \begin{cases} \sin 2\xi, & \xi \geq 0, \\ 2\xi, & \xi \leq 0. \end{cases}$

16. ③ Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^2$ ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$):

$$\Delta u = 12r^2\sin 2\varphi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$(u + u_r)\Big|_{r=1} = 2 + 2\sin 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=2} = 1 - \sin\varphi + 28\sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Ответ: $u = 2\ln r + \frac{4}{r}\sin\varphi + (r^4 - r^2)\sin 2\varphi$.
Общее решение $u = A + B\ln r + \left(Cr + \frac{D}{r}\right)\sin\varphi + \left(Er^2 + \frac{H}{r^2} + r^4\right)\sin 2\varphi$.
Из граничных условий $A + B = 2$, $\frac{B}{2} = 1$, $C = 0$, $-\frac{D}{4} = -1$, $3E - H + 5 = 2$, $4E - \frac{H}{4} + 32 = 28$.
Получаем $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 4$, $E = -1$, $H = 0$.

17. 3 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t) = \begin{cases} \exp(-t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения $P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = XY$, и вычислить математическое ожидание и дисперсию Z.

Ответ: $\rho_Z(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|)$, $\quad MZ = 0$, $\quad DZ = MZ^2 = 2$.

$$P(Z < t) = \frac{1}{2}P(X < t) + \frac{1}{2}P(X > -t), \quad \Rightarrow \quad \rho_Z(t) = \frac{1}{2}\rho_X(t) + \frac{1}{2}\rho_X(-t).$$